第 4 节 含 e^x 或 $\ln x$ 的方程、不等式的处理技巧（★★★）

内容提要

在研究涉及含 e^x 或 $\ln x$ 这类结构的方程或不等式时，若直接求导分析较复杂，还可考虑用下面的两种变形处理方法来简化分析过程.

1．$\mathrm{e}^x+u(x)$ 结构的变形方法：将其等价变形成 $\varphi(x)\mathrm{e}^x$ 或 $\dfrac{\varphi(x)}{\mathrm{e}^x}$ 这类结构（也即让 e^x 与其余含 x 的部分相乘或相除），再求导分析.

2．$u(x)\ln x$ 结构的变形方法：将其等价变形成 $\ln x+\varphi(x)$ 这类结构（也即将 $\ln x$ 孤立出来，求导后就没有 $\ln x$ 了），再求导分析.

典型例题

类型Ⅰ：含 e^x 结构的方程或不等式

【例 1】证明：当 $x>0$ 时，$\mathrm{e}^x>\dfrac{1}{2}x^2+x+1$.

证法 1：（最常规的想法直接作差构造，我们来试试看）

设 $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}x^2-x-1(x>0)$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，（直接判断正负不易，故二次求导）$f''(x)=\mathrm{e}^x-1>0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $f'(0)=0$，所以 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f(0)=0$，所以 $f(x)>0$，故当 $x>0$ 时，$\mathrm{e}^x>\dfrac{1}{2}x^2+x+1$ 成立.

证法 2：（由内容提要 1 知，可在要证的不等式两端同除以 e^x，变为 $\dfrac{\varphi(x)}{\mathrm{e}^x}$ 这种结构，更易分析）

$\mathrm{e}^x>\dfrac{1}{2}x^2+x+1\Leftrightarrow\dfrac{x^2+2x+2}{\mathrm{e}^x}<2$，所以要证 $\mathrm{e}^x>\dfrac{1}{2}x^2+x+1$，只需证 $\dfrac{x^2+2x+2}{\mathrm{e}^x}<2$，

设 $g(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{\mathrm{e}^x}(x>0)$，则 $g'(x)=-\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

又 $g(0)=2$，所以 $g(x)<2$，即 $\dfrac{x^2+2x+2}{\mathrm{e}^x}<2$，故当 $x>0$ 时，$\mathrm{e}^x>\dfrac{1}{2}x^2+x+1$ 成立.

【反思】尽管两种证法都证出了不等式，但和证法 1 相比，证法 2 可少求一次导，所以当不等式中有 e^x 时，可考虑将调整为 $\mathrm{e}^x\varphi(x)$ 或 $\dfrac{\varphi(x)}{\mathrm{e}^x}$ 这种结构，再证明.

【变式】当 $x<0$ 时，证明：$\mathrm{e}^{x+1}+\dfrac{1}{x}\le 0$.

分析：若直接令 $f(x)=\mathrm{e}^{x+1}+\dfrac{1}{x}(x<0)$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^{x+1}-\dfrac{1}{x^2}$，不易判断正负，再求导，$f''(x)=\mathrm{e}^{x+1}+\dfrac{2}{x^3}$，仍然不易判断正负，若继续求导，依然不易判断正负，这个思路就可以放弃了，转为先变形再证.

证明：（要证的不等式中有 e^{x+1} 这一结构，可先两端乘以 x，转化为 x 与 e^{x+1} 相乘的形式再证）

当 $x<0$ 时，$\mathrm{e}^{x+1}+\dfrac{1}{x}\le 0 \Leftrightarrow x\mathrm{e}^{x+1}+1\ge 0$，设 $f(x)=x\mathrm{e}^{x+1}+1(x<0)$，则 $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x+1}$，

所以 $f'(x)>0 \Leftrightarrow -1<x<0$，$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<-1$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,0)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=0$，从而 $f(x)\ge 0$，故 $\mathrm{e}^{x+1}+\dfrac{1}{x}\le 0$.

【总结】和例 1 相比，本题直接构造函数求导证明不等式较难，而两端同乘以 x 后，再构造函数分析则很简单，再次说明了对于含 e^x 结构的方程或不等式，转化成 $\mathrm{e}^x\varphi(x)$ 或 $\dfrac{\varphi(x)}{\mathrm{e}^x}$ 来研究具有优越性.

类型Ⅱ：含 $\ln x$ 结构的方程或不等式

【例 2】证明：当 $x>1$ 时，$2x\ln x<x^2-1$.

证法 1：（先试试直接作差构造）设 $f(x)=2x\ln x-x^2+1(x>1)$，则 $f'(x)=2+2\ln x-2x$，

（不易直接判断 $f'(x)$ 的正负，故二次求导）$f''(x)=\dfrac{2}{x}-2=\dfrac{2(1-x)}{x}<0$，所以 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

又 $f'(1)=0$，所以 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，结合 $f(1)=0$ 知 $f(x)<0$，即 $2x\ln x<x^2-1$.

证法 2：（要证的不等式中有 $x\ln x$，可两边同除以 x，将 x 与 $\ln x$ 分离，再作差构造，方便求导分析）

$2x\ln x<x^2-1 \Leftrightarrow 2\ln x<x-\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow 2\ln x-x+\dfrac{1}{x}<0$，所以要证 $2x\ln x<x^2-1$，只需证 $2\ln x-x+\dfrac{1}{x}<0$，

设 $f(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}(x>1)$，则 $f'(x)=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

又 $f(1)=0$，所以当 $x>1$ 时，$f(x)<0$，即 $2\ln x-x+\dfrac{1}{x}<0$，所以当 $x>1$ 时，$2x\ln x<x^2-1$ 成立.

【反思】尽管两种证法都证出了不等式，但证法 2 无需二次求导，计算量更小，所以当不等式中有 $u(x)\ln x$ 这种结构时，可以考虑将其等价变形成 $\ln x+\varphi(x)$ 的形式，再构造函数证明.

【变式】已知函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-x^2+2$，证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的零点.

证法 1：（要研究零点，需先分析单调性，先试试直接求导分析）

由题意，$f'(x)=\ln(x+1)+(x+1)\cdot\dfrac{1}{x+1}-2x=\ln(x+1)+1-2x$，（不易直接判断正负，考虑二次求导）

所以 $f''(x)=\dfrac{1}{x+1}-2=-\dfrac{2x+1}{x+1}$，当 $x>0$ 时，$f''(x)<0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

（有了 $f'(x)$ 的单调性，要判断其正负，需找零点，此处零点无法求出，故通过取点论证）

又 $f'(0)=1>0$，$f'(1)=\ln 2-1<0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有唯一的零点 x_0，

且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

因为 $f(0)=2>0$，所以 $f(x_0)>0$，又 $f(5)=6\ln 6-23<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的零点.

证法 2：（观察发现 $f(x)$ 的解析式中有 $(x+1)\ln(x+1)$，故也可考虑在方程 $f(x)=0$ 的两端同除以 $x+1$，从而将 $\ln(x+1)$ 孤立出来，再求导分析）

由题意，$f(x)=0\Leftrightarrow(x+1)\ln(x+1)-x^2+2=0\Leftrightarrow\ln(x+1)-\dfrac{x^2-2}{x+1}=0$ ①，

令 $g(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x^2-2}{x+1}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2x(x+1)-(x^2-2)}{(x+1)^2}=-\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2}<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又 $g(0)=2>0$，$g(4)=\ln 5-\dfrac{14}{5}<0$，所以 $g(x)$ 有唯一的零点，

由①知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点与 $g(x)$ 相同，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的零点.

【总结】无论是方程还是不等式，遇到 $u(x)\ln x$ 这种结构时，若直接求导较麻烦，则可考虑将其等价变形成 $\ln x+\varphi(x)$ 的形式，再构造函数求导分析.

强化训练

1．（2023・全国模拟・★★）证明：当 $x>0$ 时，$(x-2)e^x+x+2>0$.

2．（2022・广东开学・★★★）已知函数 $f(x)=\dfrac{2(e^x-x-1)}{x^2}$，证明：当 $x>0$ 时，$f(x)>1$.

3．（2022・新高考Ⅰ卷节选・★★★）已知函数 $f(x)=e^x-ax$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值，求 a.

4．（2021・全国乙卷・★★★★）设函数 $f(x)=\ln(a-x)$，已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点.

（1）求 a；

（2）设函数 $g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}$，证明：$g(x)<1$.